ACTIVITÉ

- SPIRALE DE FIBONACCI -

Intentions pédagogiques

- Introduire les nombres de Fibonacci et la spirale de Fibonacci
- Observer la présence de mathématiques dans la nature
- Introduire le nombre d'or
- Développer la culture mathématique
- Introduire les preuves géométriques

Composantes de la compétence travaillées

- Émettre des conjectures
- Construire et exploiter des réseaux de concepts et de processus mathématiques

Concepts utilisés

- Opérations arithmétiques (addition, multiplication, division, puissance)
- Égalités et expressions équivalentes
- Figures (carrés, rectangles, cercles)
- Calculs d'aire

Ressources matérielles

- Animation Geogebra « Spirale de Fibonacci » (disponible sur internet en suivant ce lien: http://www.geogebratube.org/student/mXnUkTse6)
- Animation Geogebra « Le pentagone, son étoile et le nombre d'or » (disponible sur internet en suivant ce lien : http://www.geogebratube.org/student/mhWUFLYzT)
- Feuilles de papier
- Crayons
- Images en annexe
- Calculatrice

Niveau scolaire visé

Sec 2e cycle

Compétence travaillée

C2

Champs mathématiques concernés

Formule pédagogique suggérée

Temps requis

Environ 30 minutes

Déroulement suggéré

Étape 1 : Introduction (5 minutes)

Pour introduire l'activité, présenter aux élèves des objets ou des images de la nature et leur faire observer les spirales. Vous trouverez en annexe deux images de fleur, ainsi que des exemples de décompte de spirales sur ces mêmes images.

Nous vous recommandons d'amener des objets en classe ou d'utiliser vos propres images. Par exemple, vous pouvez utiliser une fleur de tournesol, une fraise, un ananas ou une pomme de pin. C'est sur la pomme de pin que les spirales seront les plus évidentes (un exemple se trouve en annexe). Demander aux élèves de compter les spirales qui partent du centre de la fleur ou de la queue du fruit, et ce, dans le sens horaire comme dans le sens anti-horaire. Ils doivent noter les résultats, car vous y reviendrez plus tard. Le résultat attendu est que le nombre de spirales sera un nombre de la suite de Fibonacci, mais nous conseillons de ne pas le mentionner aux élèves tout de suite.

Étape 2 : Réalisation (20 minutes)

Dans cette partie de l'activité, les élèves pourront se familiariser avec la suite de Fibonacci. Pour ce faire, leur expliquer qu'il s'agit d'une suite dont chaque terme est la somme des deux précédents.

Écrire avec eux les premiers termes : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,…

Remarquent-ils quelque chose particulier en lien avec l'étape 1? On observe en effet que le nombre de spirales dans les objets de la nature est souvent un nombre de Fibonacci.

Il existe plusieurs particularités intéressantes de cette suite. En voici deux :

A- *La somme des carrés des n premiers termes est égale au produit des termes en position n et n+1*.

Exemples :
1+1+4+9 = 15 = 3*5
1+1+4+9+25 = 40 = 5*8

Pourquoi?
Il s'agit en fait de deux expressions différentes pour l'aire d'un même rectangle qui a pour côté le (n+1)ième terme de la suite. On peut le voir à l'aide du fichier Geogebra. Pour ce faire, on déplace le curseur[1] jusqu'à l'obtention d'un certain rectangle (ne pas dépasser la valeur 6 avec notre curseur) et on constate que ce rectangle est constitué de carrés. Ces carrés ont pour mesure de côtés les termes précédents dans la suite de Fibonacci. Une façon d'exprimer l'aire du rectangle est d'additionner les aires de ces carrés (ce qui correspond à faire la somme des n premiers termes de la suite, élevés au carré). Une autre façon est de multiplier la base par la hauteur (ce qui correspond à faire la multiplication du n-ième et du (n+1)ième termes).

[1] Le curseur se trouve en bas de la page Geogebra. Il a la forme d'un point qu'on peut déplacer sur une ligne. En déplaçant ce point, on modifie la valeur de « a » et cela fait avancer la construction.

B- Si on divise deux termes consécutifs, plus on est loin dans la suite, plus le résultat s'approche du nombre d'or (φ).

Demander à tous les élèves de faire les divisions suivantes : 2/1, 3/2, 5/3, 8/5, 13/8, 21/13, 34/21. On note les résultats obtenus au tableau. On observe avec les élèves que les résultats sont de plus en plus proches de 1,6. En réalité, les résultats s'approchent du nombre d'or (noté φ et dont la valeur est d'environ 1,618). Le nombre d'or serait celui d'une proportion parfaite. On le retrouve dans beaucoup d'œuvres d'art.

Un exemple de la présence du nombre d'or en géométrie et en dessin est celui de l'étoile inscrite dans un pentagone régulier. On observe en effet que le rapport du côté de l'étoile sur le côté du pentagone correspond au nombre d'or. Pour le voir, utiliser le fichier Geogebra « Le pentagone, son étoile et le nombre d'or ». Le rapport en question y est mis en évidence. Vous pouvez modifier à votre guise les dimensions du pentagone régulier en déplaçant le point B pour créer une multitude d'exemples.

Étape 3 : Intégration (10 minutes)

Présenter aux élèves la spirale de Fibonacci à l'aide du fichier Geogebra Pour ce faire, déplacer le curseur jusqu'à sa valeur maximale. Entre les valeurs 6 et 13 du curseur, on voit se dessiner la spirale de Fibonacci. Cette spirale est dite « parfaite », notamment à cause de son lien avec le nombre d'or (φ). Dans la nature, les pétales ou les feuilles se positionnent souvent de façon à optimiser l'espace, et une des dispositions implique un angle de [360° – (360/φ)°] entre chaque élément. C'est cette disposition qui crée le motif de la spirale que l'on a repéré à l'étape 1.

Pour aller plus loin…

Pour poursuivre dans la découverte de la suite de Fibonacci, ses propriétés et ses applications, *Sciences et mathématiques en action* vous propose une activité qui s'appelle « La grenouille de Fibonacci ». Vous pouvez consulter une description sommaire de l'activité, ainsi que télécharger l'activité elle-même en format Adobe PDF, en suivant le lien suivant (http://www.smac.ulaval.ca/fileadmin/smac/documents/showmath1/1_1.html). Notez toutefois que le public cible de cette activité est le premier cycle du secondaire.

Vous manquez de temps?

Voici quelques suggestions de présentation « express » :

→ Présenter directement en classe la suite de Fibonacci et la construction de la spirale qui lui est associée en vous aidant de l'application Geogebra.

→Présenter seulement une des deux propriétés de la suite de Fibonacci présentées dans le document.

→ À la fin d'un cours, donner comme mission aux élèves d'amener au prochain cours une pomme de pin cueillie dans la nature. Au cours suivant, consacrer quelques minutes à compter les spirales et à constater le lien avec les nombres de la suite de Fibonacci. Les spirales sont plus évidentes et plus faciles à compter sur des objets comme les pommes de pin que sur des images de fleur.

ANNEXES

Fleur A sans les spirales

Fleur A avec les spirales (sens horaire)

Fleur B sans les spirales

Fleur B avec spirales (sens horaire)

Fleur B avec spirales (sens anti-horaire)

Pomme de pin avec les spirales dans les deux sens