ACTIVITÉ
- SPIRALE DE FIBONACCI -

Étape 1 : Introduction

Regarde bien l'image suivante :


Crédit photo: Par Jean-Luc W [CC-BY-SA-3.0 (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0)], via Wikimedia

Il s'agit d'une pomme de pin. On remarque que les écailles de la pomme de pin sont placées en forme de spirales. Si on compte le nombre de spirale (comme c'est fait sur l'image), on trouve qu'il y en a 8 dans le sens horaire et 13 dans le sens anti-horaire.
Essaie de trouver une pomme de pin ou un ananas. Avec un crayon feutre, dessine les spirales formées par les écailles (comme c'est fait sur le dessin). Compte combien de spirales il y a.

Étape 2 : La suite de Fibonacci

Voici le début de la suite de Fibonacci : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,…

Remarques-tu quelque chose?
Chaque nombre de Fibonacci est le résultat de l'addition des deux nombres précédents.

Pourquoi est-ce une suite intéressante?
Les nombres de Fibonacci se retrouvent entre autres dans la nature. Regarde bien la pomme de pin de l'étape 1. Que remarques-tu? Et oui! Le nombre de spirales, dans un sens comme dans l'autre, fait partie de la suite de Fibonacci! Si tu as utilisé ta propre pomme de pin ou un ananas pour compter les spirales, tu devrais aussi avoir trouvé des nombres de Fibonacci.
Il y a d'autres raisons qui font que cette suite fascine les mathématiciens et le grand public. Elle a plusieurs particularités intéressantes. En voici deux :

A- *La somme des carrés des n premiers termes est égale au produit des termes en position n et n+1*.

Exemples :
$1^2+1^2+2^2+3^2=1+1+4+9 = 15 = 3*5$
$1^2+1^2+2^2+3^2+5^2=1+1+4+9+25 = 40 = 5*8$

Pourquoi?
Il s'agit en fait de deux expressions différentes pour l'aire d'un même rectangle. Le grand côté de ce rectangle est le (n+1)ième terme de la suite.

Pour mieux le visualiser, utilise l'application Geogebra sur la suite de Fibonacci en suivant le lien internet suivant : http://www.geogebratube.org/student/mXnUkTse6. Déplace le curseur[1] jusqu'à la valeur 5. On remarque que les carrés dessinés ont tous pour mesure de côté des nombres de la suite de Fibonacci. De plus, le carré le plus grand a un côté de 5 unités. Autrement dit, la suite est arrêtée au terme 5. La « somme des carrés des n premiers termes » dans ce cas, est $1^2+1^2+2^2+3^2+5^2$, ce qui est égal à 1+1+4+9+25, donc 40. Cette somme, c'est aussi la somme de l'aire de tous les carrés réunis.

Rassemblés, tous les carrés que l'on voit à l'écran forment un rectangle qui a un côté de 5 unités et un côté de 8 unités (8 est justement le terme qui suit 5 dans la suite de Fibonacci). Si on voulait calculer l'aire de ce rectangle, on pourrait additionner l'aire des carrés qui le forment (on trouverait 40, car c'est justement l'addition faite un peu plus haut). On pourrait aussi calculer l'aire directement en faisant 8*5 = 40.

On vient donc de prouver de façon « géométrique » que peu importe où on est dans la suite de Fibonacci, il y a une égalité entre, d'une part, la somme des *n* premiers termes de la suite, élevés au carré et, d'autre part, le produit du *n*-ième et du (*n*+1)ième termes.

B- Si on divise deux termes consécutifs : plus on est loin dans la suite, plus le résultat s'approche du nombre d'or (φ).

Effectue les divisions suivantes et note les résultats: 2/1, 3/2, 5/3, 8/5, 13/8, 21/13, 34/21.

Que remarques-tu?
Les résultats sont de plus en plus proches de 1,6. En réalité, les résultats s'approchent du nombre d'or. Le nombre d'or est noté φ et sa valeur est d'environ 1,618. Le nombre d'or serait celui d'une proportion parfaite. On le retrouve dans beaucoup d'œuvres d'art.

Un exemple de la présence du nombre d'or en géométrie et en dessin est celui de l'étoile inscrite dans un pentagone régulier. On observe en effet que le rapport du côté de l'étoile sur le côté du pentagone correspond au nombre d'or. Pour le voir, utiliser le fichier Geogebra « Le pentagone, son étoile et le nombre d'or » (tu peux y accéder en suivant le lien internet suivant : http://www.geogebratube.org/student/mhWUFLYzT). Tu peux déplacer autant que tu veux le point P, ce qui va modifier les dimensions du pentagone, mais pas le rapport auquel on s'intéresse, comme tu pourras le remarquer.

Étape 3 : La spirale de Fibonacci

À partir de la suite de Fibonacci, on peut dessiner la spirale de Fibonacci. Tu peux la visualier sur l'application Geogebra « Spirale de Fibonacci » (http://www.geogebratube.org/student/mXnUkTse6) en déplaçant le curseur jusqu'à sa valeur maximale. Entre les valeurs 6 et 13 du curseur, on voit se dessiner la spirale de Fibonacci. Cette spirale est dite « parfaite », notamment à cause de son lien avec le nombre d'or (φ). Dans la nature, les pétales ou les feuilles se positionnent souvent de façon à optimiser l'espace, et une des dispositions implique un angle de [360° – (360/φ)°] entre chaque élément. C'est cette disposition qui crée le motif de la spirale que l'on a repéré sur la pomme de pin à l'étape 1 et qui nous rappelle la spirale de Fibonacci.

---

[1] Le curseur se trouve en bas de la page Geogebra. Il a la forme d'un point qu'on peut déplacer sur une ligne. En déplaçant ce point, on modifie la valeur de « a » et cela fait avancer la construction.