



ACTIVITÉ

- LE RUBAN DE MÖBIUS -



Intentions pédagogiques

- ❖ Introduire le ruban de Möbius
- ❖ Développer la culture mathématique
- ❖ Mettre en évidence la présence des mathématiques dans d'autres domaines
- ❖ Développer le sens spatial

Composantes de la compétence travaillées

- ❖ Émettre des conjectures
- ❖ Construire et exploiter des réseaux de concepts et de processus mathématiques

Concepts utilisés

- ❖ Comparaison et construction de solides
- ❖ Description de solides à l'aide de faces
- ❖ Dimensions d'un objet et mesure par comparaison

Ressources matérielles

- ❖ 1 bande de papier par personne (dimension idéale d'environ 4 cm par 27 cm)
- ❖ Colle ou ruban adhésif
- ❖ Crayon de plomb ou stylo
- ❖ Crayon de feutre ou surligneur
- ❖ Ciseaux
- ❖ Images en annexe
- ❖ 1 anneau régulier en papier, assez gros, pour une démonstration (facultatif)

Niveau scolaire visé



Champ mathématique concerné



Formule pédagogique suggérée



Temps requis

Environ 35 minutes



Déroulement suggéré



Préparation

Avant de présenter l'activité en classe, visionner les vidéos 1 à 3 sur le ruban de Möbius. Vous serez en mesure de reproduire les manipulations devant la classe.

Remarques sur les vidéos :

- On indique parfois de « colorier » le ruban pour compter le nombre de faces. Il est possible de tracer un simple trait plutôt que de colorier complètement la surface. C'est d'ailleurs ce qui est fait dans la vidéo. Vous pouvez indiquer à vos élèves de faire l'un ou l'autre, les deux façons de procéder sont correctes et mèneront à la même conclusion : s'il n'est pas possible de colorier (ou de tracer de trait sur) toute la surface de papier sans lever le crayon. Alors il y a plus d'une face. Dans la vidéo 2, c'est le cas de l'anneau (qui a deux faces), mais pas du ruban de Möbius (qui n'en a qu'une).
- Le terme « bord » utilisées dans les vidéos réfère à la frontière de la bande de papier, à la bordure. Les mots « cotés » et « faces » sont utilisés comme des synonymes.
- Référez-vous à la fiche explicative pour connaître les justifications derrière les étonnants résultats obtenus!
- Il n'y a rien de plus efficace pour comprendre les transformations des anneaux et des rubans de Möbius que de les manipuler soi-même. Ceci est vrai pour vous comme pour vos élèves!

Étape 1 : Introduction (5 minutes)

Présenter aux élèves l'image suivante : <http://www.mcescher.com/gallery/mathematical/mobius-strip-ii/>.

Il s'agit d'une œuvre de M.C. Escher, un artiste qui a beaucoup utilisé les mathématiques dans ses œuvres.

Les élèves remarquent-ils quelque chose de particulier sur l'image?

Si les élèves ne remarquent rien, les étapes suivantes sauront peut-être susciter des étonnements.

Étape 2 : Réalisation (20 minutes)

Construction et exploration du ruban de Möbius :

Avant de réfléchir sur les propriétés du ruban de Möbius, présenter aux élèves un anneau régulier et discuter avec eux du fait qu'il a deux faces.

Ensuite, faire construire un ruban de Möbius aux élèves. D'abord, demander aux élèves de suivre les étapes suivantes :

1. Prendre une bande de papier (environ 4 cm par 30 cm)
2. En faire un anneau
3. Avant de coller les deux extrémités, faire un demi-tour avec l'une des extrémités
4. Coller



Vous trouverez en annexe une image du produit attendu de cette construction.

Maintenant qu'ils ont créé leur ruban de Möbius, demander aux élèves de déterminer le nombre de faces de l'objet créé. La plupart des élèves diront sûrement que le ruban a deux faces. Si c'est le cas, vous pouvez leur demander de vous le prouver. Certains auront peut-être l'idée de tracer deux lignes qui parcourent chacune des deux faces et seront surpris par les propriétés du ruban de Möbius.

Si ce n'est pas le cas, c'est à vous de leur demander de tracer une ligne au centre de la bande afin qu'ils vérifient le nombre de faces. Pour ce faire, il est important de continuer de tracer jusqu'à ce qu'on revienne au point de départ. Il peut donc être utile d'indiquer clairement le point de départ de notre ligne.

En discussion, on réalise que notre ligne parcourt toute la bande sans qu'on ait eu besoin de retourner le papier : il n'y a qu'une seule face.

Manipulations :

Pour la suite de l'activité, diviser le groupe en deux : une moitié de la classe coupe sa bande en deux en suivant la ligne tracée au centre et l'autre moitié la coupe au tiers.

Avant de procéder, prendre le temps de demander aux élèves d'anticiper le résultat de la coupe.

Attention : les élèves qui coupent au tiers de la bande doivent toujours rester au tiers, ou environ.

Un bon indicateur est qu'ils doivent toujours rester du même côté de la ligne tracée précédemment au centre de la bande. À un moment, ils vont croiser le début de la coupe, ils doivent continuer en restant au tiers sans chercher à rejoindre cette première coupe. Vous pouvez vous référer aux photos disponibles en annexe, on y voit le moment où on croise notre coupe pour la première fois, sans la rejoindre. À la fin, s'ils sont restés alignés au tiers, les élèves vont rejoindre naturellement le début de leur coupe.

On obtiendra des résultats variés! Ceux qui ont *coupé à la moitié* obtiendront 1 anneau deux fois plus long que leur ruban de Möbius original, qui est tordu de deux tours complets, mais qui n'est pas un ruban de Möbius. Ceux qui ont *coupé au tiers* obtiendront 2 « anneaux » qui s'entrecroisent. Le plus petit est un ruban de Möbius et le plus grand est simplement un anneau qui est tordu de deux tours complets.

En annexe se trouvent des photos qui illustrent le ruban avant, pendant et après chacune des coupes.

Étape 3 : Explication des résultats obtenus à l'étape 2 (facultative ; 5 minutes)

Le ruban de Möbius ne possède qu'une face et un bord. De plus, il n'y a qu'un demi-tour dans le ruban.

Toutefois, *en coupant le ruban à la moitié* nous avons créé un deuxième bord à celui-ci. Ce n'est donc plus un ruban de Möbius. Comme nous avons coupé le demi-tour, on peut dire qu'il est présent deux



fois dans notre nouveau ruban. Cela résulte en une torsion d'un tour complet. Aussi, en dépliant ce nouveau ruban, on crée un deuxième tour complet dans celui-ci. Le résultat est donc un ruban avec 2 faces, 2 bords et 2 tours, et deux fois plus long que le ruban initial.

Lorsqu'on *coupe le ruban au tiers*, la ligne de coupe devient l'unique bord d'un nouveau ruban de Möbius : elle délimite une bande qui n'y a qu'un seul bord, qu'une seule face et qui est tordue d'un simple demi-tour. La portion de la bande qui est située entre la ligne de coupe et le bord du ruban de Möbius initial, quant à elle, est maintenant délimitée par deux bords. Elle a deux faces et elle est tordue de deux tours complets (l'explication de la situation que l'on trouve ici est en fait la même que pour le ruban obtenu après une coupe à la moitié). Ce n'est pas un ruban de Möbius.

Étape 4 : Intégration (5 minutes)

Pour conclure l'activité, présenter de nouveau aux élèves l'image de l'étape 1. Ils pourront alors remarquer que les fourmis marchent sur un ruban de Möbius. Mentionner aux élèves que certains symboles qu'ils connaissent bien sont similaires ou inspirés des rubans de Möbius. Le logo de recyclage en est un exemple frappant. On peut l'illustrer en montrant une image du dit logo (fournie en annexe) ou en le trouvant sur des objets dans la classe. Le logo de Google Drive est un autre exemple.

Le symbole de l'infini (∞) évoque aussi une image semblable au ruban de Möbius.

Quelle est l'utilité du ruban de Möbius dans la vraie vie? Une possibilité est de produire des courroies ayant cette forme, de manière à ce qu'elles s'usent au même rythme des « deux côtés ». C'est d'ailleurs ce qui est utilisé dans beaucoup de modèles de voitures.

La branche des mathématiques qui étudie les surfaces et, entre autres, les rubans de Möbius, s'appelle la *topologie*.

Vous manquez de temps?

Faites une démonstration plutôt qu'un atelier : construisez vous-mêmes un ruban de Möbius. Demandez aux élèves de tenter de prédire le nombre de faces qu'il a et expliquez-leur qu'il n'en a qu'une.

Pour les intriguer davantage, construisez deux rubans de Möbius, puis demandez à un élève de couper un des rubans à la moitié et à un autre élève de couper l'autre ruban au tiers, puis comparez les résultats.



ANNEXES

Le ruban de Möbius construit



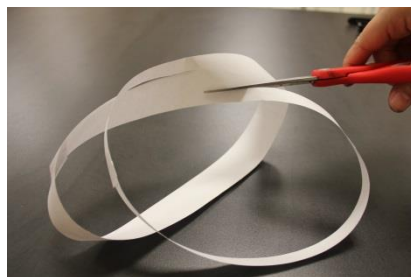
Le ruban pendant la coupe à la moitié



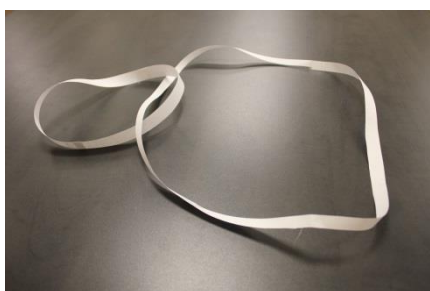
Le ruban après la coupe à la moitié



Le ruban pendant la coupe au tiers



Le ruban après la coupe au tiers



Sigle du recyclage

