# ÉNIGME

## -VITRAIL-

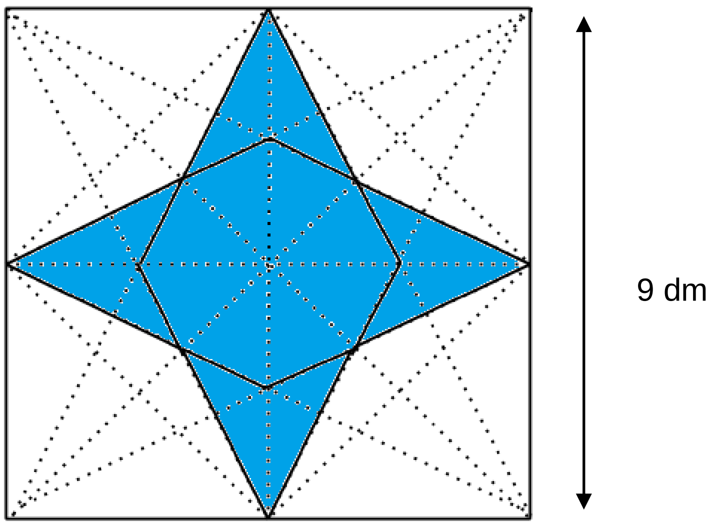
SEMAINE DES MATHS

***Matériel :***

- Vidéo de l'énigme
- Feuilles de papier
- Crayons

## Énoncé de l'énigme

Pour souligner le service d'orientation de son école, la directrice fait fabriquer un vitrail représentant une rose des vents. Dans ce vitrail, les lignes pointillées relient soit les points milieu des côtés, soit les coins du carré. Les côtés du vitrail mesurent 9 dm.




Afin d'aider la directrice pour les mesures, pouvez-vous déterminer l'aire de la région en bleu?

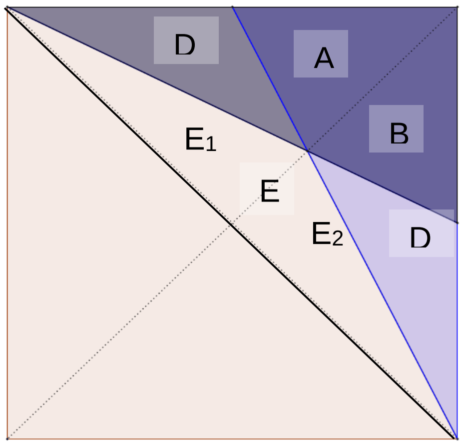
# Solution de l'énigme

## Voici la réponse :

L'aire de la région en bleu est 27 dm$^2$. Il existe de nombreuses façons de résoudre cette énigme. Nous en exposons 4 dans les pages qui suivent, mais il est tout à fait possible que vos élèves et vous arriviez à la bonne réponse en utilisant une autre façon de faire!

### Première solution

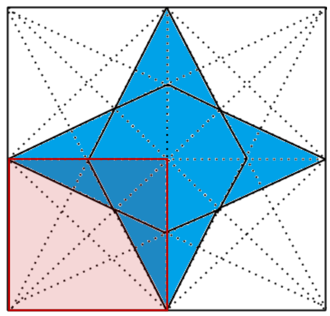
Comme la forme est plutôt compliquée, commençons par en observer une partie. Regardons seulement le carré ci-dessous, qui représente le quart de la figure.




Le triangle gris a une aire correspondant au quart de ce carré, puisque l'hypoténuse du triangle relie le coin au milieu du côté droit. Pour la même raison, le triangle bleu a aussi une aire équivalente au quart du carré. Si les deux triangles n'étaient pas superposés sur les régions notées A et B, alors ils recouvriraient la moitié de ce carré.
La différence d'aire entre la moitié du carré et la région recouverte est donc donnée par l'aire des triangles A et B.
De plus, elle est aussi donnée par l'aire du grand triangle E. Les triangles A, B, $E_1$ et $E_2$ ont donc des aires équivalentes.
Les triangles $D_1$ et $D_2$ ont aussi la même aire puisqu'ils ont la même base et la même hauteur que A et B.

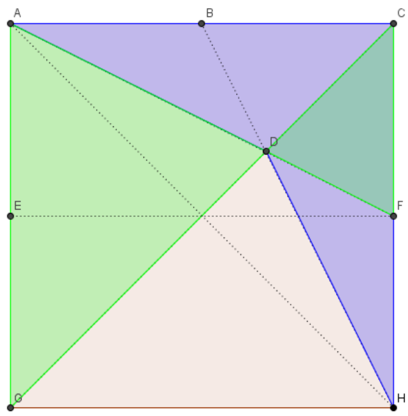
Tous les triangles de la moitié supérieure du carré ont donc la même aire. Comme 4 des six triangles font partie du vitrail, soit 2/3 de l'aire de la moitié du carré, on trouve que l'aire totale de la région en bleu sur le vitrail est :

$$A_{bleue} = \frac{4}{6} * \frac{1}{2} * A_{carré} = \frac{2}{3} * \frac{1}{2} * c^2 = \frac{1}{3} * c^2$$



On peut appliquer le résultat au vitrail en entier, car tous les quarts sont identiques.
Dans le cas du grand carré, c mesure 9 dm et l'aire de la région en bleu est 27 dm$^2$.

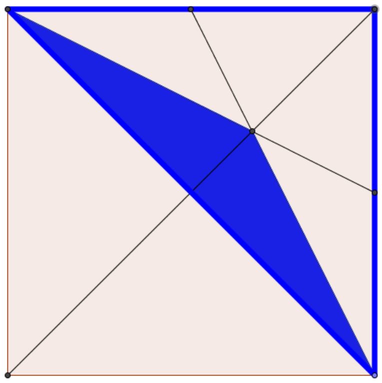
### Deuxième solution




Les deux triangles en vert sont dans un rapport de similitude ½. En effet, ils sont semblables par AA (opposés par le sommet et alternes-internes) et leurs côtés homologues supportés par le carré sont dans un rapport 1:2. Leurs aires sont donc dans un rapport 1/4. Le petit triangle bleu, DFH, a la même aire que DCF car ils ont la même hauteur et des bases congruentes. Par conséquent, ensemble, les triangles DCF et DFH ont une aire égale à la moitié de celle de ADG. Par symétrie, on peut dire que ACD a une aire égale à la moitié de ADG. Ainsi, le triangle ACD occupe le tiers du triangle ACG et le triangle DCH occupe le tiers du triangle GCH. La partie en bleu représente le tiers du carré et, si on considère tout le vitrail, la région bleue occupe le tiers de l'aire totale du grand carré. Nous obtenons donc $A_{bleue} = A_{carré} * \frac{1}{3} = 9 * 9 * \frac{1}{3} = \frac{81}{3} = 27\ dm^2$.

**Troisième solution**

Théorème : Les médianes d'un triangle isocèle se croisent au tiers de sa hauteur.



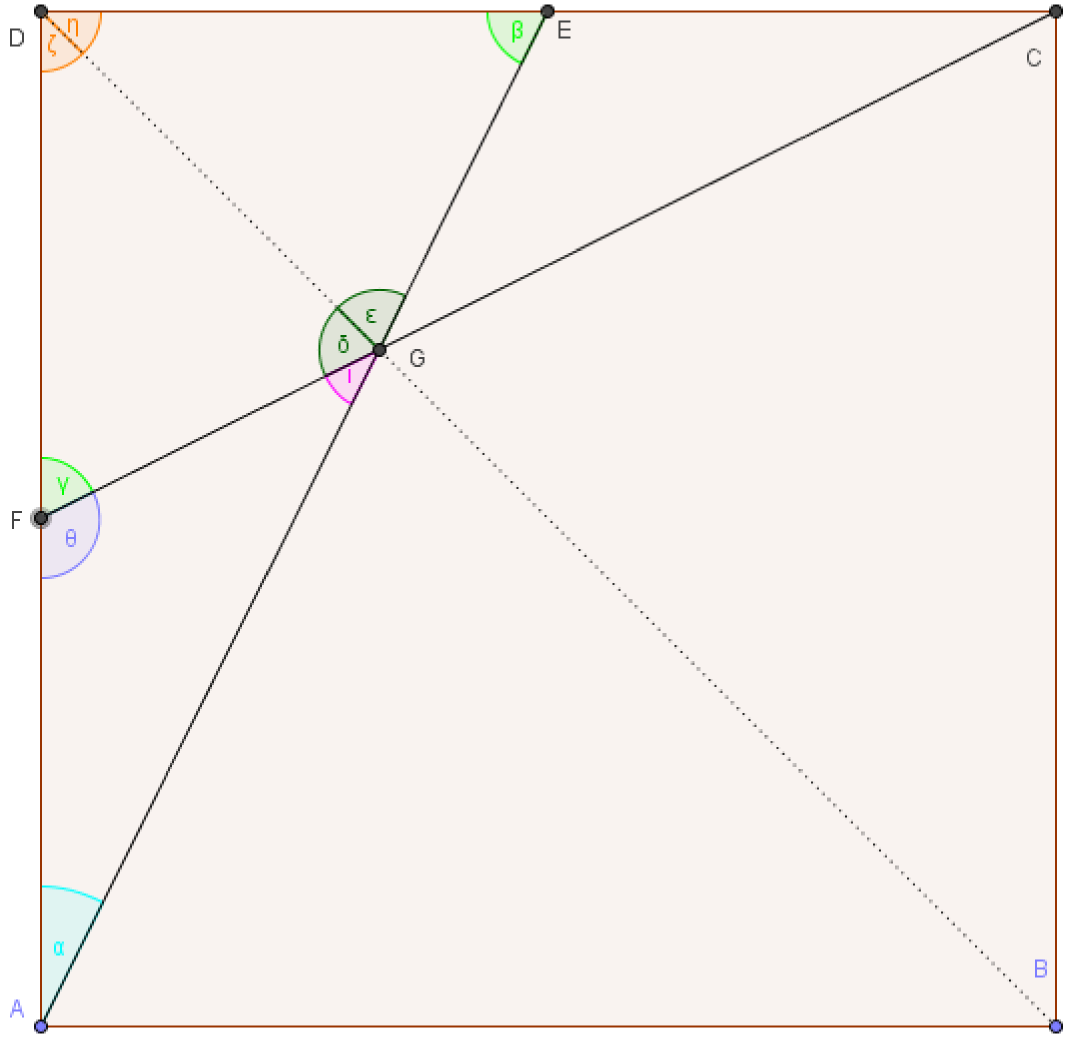
Ici, le triangle bleu foncé a la même base que le triangle à bordure bleue. La hauteur du plus petit triangle est le tiers de celle du grand selon le théorème ci-haut.

La différence entre le triangle à bordure bleue et le triangle rempli bleu correspond à la région bleue pâle sur la partie du vitrail initial que nous considérons. Cette région occupe donc le 2/3 de la moitié du carré. On peut généraliser au vitrail complet et affirmer que l'aire de la région du vitrail que nous cherchons est

$$A_{bleue} = \frac{2}{3} * \frac{1}{2} * A_{carré} = \frac{2}{3} * \frac{1}{2} * 9 * 9 = 27\ dm^2.$$

**Quatrième solution**

<u>Quart inférieur droit du vitrail</u>



Sur la figure ci-haut, tous les angles de la même couleur ont la même mesure. On arrive à ce résultat par symétrie.
On considère le triangle rectangle ADE. Comme le carré de la figure correspond au quart du vitrail, le triangle a une première cathète de 2,25 dm et l'autre mesure 4,5 dm. L'hypoténuse est donc de $\sqrt{(2{,}25)^2 + (4{,}5)^2} = \sqrt{25{,}3125} \approx 5{,}03114295$.
On peut trouver la valeur de l'angle α avec $\arcsin(\frac{2{,}25}{\sqrt{25{,}3125}})$ = 26,565°.

On peut trouver la valeur de l'angle β avec $\arcsin(\frac{4{,}5}{\sqrt{25{,}3125}})$=63,43495° ou avec 90° – α.

Sur la figure, on voit que :
$\beta + \varepsilon + \eta = 180^0$ où η=45°
On trouve donc que $\varepsilon = 180 - 45 - 63{,}43495 = 71{,}56505^0$.

On trouve les mesures du triangle DEG avec la loi des Sinus :
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{sin\ B} = \frac{c}{\sin C}$$
On sait que DE mesure 2,25 dm, donc :

$$\frac{2{,}25}{\sin 71{,}56505^0} = \frac{DG}{sin\ 63{,}43495^0} = \frac{EG}{\sin 45^0}$$
Ce qui donne DG=2,12132 dm et EG=1,67705 dm.

De façon homologue, on peut trouver la longueur des côtés du triangle AFG
EG=FG = 1,67705 dm
AF=2.25 dm
$$\frac{1{,}67705}{\sin 26{,}565^0} = \frac{AG}{sin\ (180^0 - 63{,}43495^0)}$$
AG=3,35411 dm

On peut alors trouver l'aire du triangle ADG avec la formule de Héron (ou d'une autre façon).
Formule de Héron : $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
Où p est le demi-périmètre $\frac{a+b+c}{2}$
p vaut ici : $p = \frac{4{,}5+2{,}12132+3{,}35411}{2}$=4,987715.

$$A = \sqrt{4{,}987715(4{,}987715-4{,}5)(4{,}987715-2{,}12132)(4{,}987715-3{,}35411)} = 3.375012744$$
Comme le triangle ADG correspond au huitième de l'aire de la région bleue du vitrail, on multiplie le résultat obtenu par 8.

$$A = 8 * 3.375012744 = 27.00010195$$

Comme on a arrondi, nous obtenons une solution qui est presque la bonne : 27 dm$^2$.