



SEMAINE DES MATHS

Matériel :

- Vidéo de l'énigme
- Feuilles de papier
- Crayons

ÉNIGME

- LE TOUR DE MANÈGE -

Énoncé de l'énigme

Benoît travaille au centre d'amusement Mathémafun. Aujourd'hui, il est assigné à un manège pour enfant. Le manège est composé de quatre avions qui tournent à vitesse constante en suivant la trajectoire d'un cercle. Une séance de ce manège dure 5 minutes. Après une séance, le centre de chaque avion est décalé d'un angle de 75° dans le sens antihoraire par rapport à sa position lors de l'arrêt précédent. À 8h ce matin, la patronne de Benoît lui a dit : « Tu peux prendre une pause à chaque fois que les avions reviendront à cette position ».



À quelle heure Benoît prendra-t-il sa première pause?

Source : Inspiré de 19e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques – finale québécoise 2004-2005, Question 9, Association Québécoise des Jeux Mathématiques.



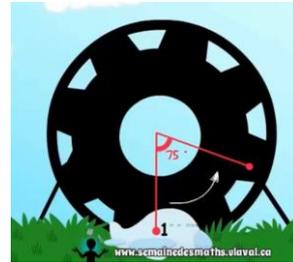
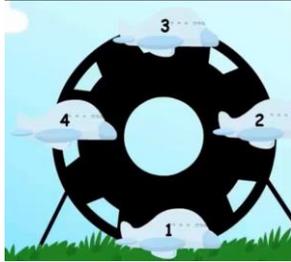
SOLUTION DE L'ÉNIGME



Voici la réponse :

Benoît prendra sa première pause à 10 h.

Voici la solution :



La prochaine fois que les avions reviendront à cette position, ils auront parcouru entièrement la circonférence du cercle, c'est-à-dire qu'ils auront parcouru un angle total de 360° . Cependant, 360 n'est pas un multiple de 75 puisque $360 \div 75 = 4 \frac{4}{5}$. Cette information nous permet de constater que, lorsque les avions reviendront à cette position pour la première fois, le manège sera en marche; après une séance, le centre de chaque avion est décalé d'un angle de 75° par rapport à sa position lors de l'arrêt précédent. Un déplacement de 360° représente 4 séances complètes et une séance complétée à 80% ($\frac{4}{5}$). Benoît ne pourra alors pas prendre sa pause au moment où les avions auront parcouru entièrement la circonférence du cercle pour la première fois.

Comment faire pour trouver le premier moment où les avions termineront une séance à la position souhaitée?

Afin d'y parvenir, il faut trouver le plus petit commun multiple (PPCM) de 75 et 360 . Le PPCM représente le plus petit nombre de degrés devant être parcourus par chaque avion pour qu'il termine une séance à la position souhaitée. Il existe plusieurs façons de trouver le PPCM. Il est possible de le trouver à tâtons, mais il est aussi possible de le trouver de cette façon :

- 1) Déterminer la factorisation première* des deux nombres :

$$75 = 3 \times 5^2.$$

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5.$$

- 2) Sélectionner chaque facteur premier sur la base de son plus grand exposant dans l'une ou l'autre des factorisations premières :

- Le plus grand exposant de 2 est 3 , donc on sélectionne 2^3 ;
- Le plus grand exposant de 3 est 2 , donc on sélectionne 3^2 ;
- Le plus grand exposant de 5 est 2 , donc on sélectionne 5^2 .

- 3) Déterminer le PPCM de 75 et 360 en faisant le produit des nombres trouvés en 2) :

$$\text{Le PPCM de } 75 \text{ et } 360 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 = 1\,800.$$

On sait alors que la première fois où les avions reviendront à leur position initiale à la fin d'une séance, ils auront chacun parcouru un angle total de $1\,800^\circ$.

* La factorisation première d'un nombre consiste à écrire ce nombre comme un produit de nombres premiers.



SOLUTION DE L'ÉNIGME (SUITE)



Comme une séance décale chaque avion de 75° , Benoît devra faire fonctionner le manège pendant:

$$1\ 800^\circ \div 75^\circ = 24 \text{ séances.}$$

Une séance de ce manège dure 5 minutes.

$$24 \text{ séances} \times 5 \text{ minutes} = 120 \text{ minutes.}$$

$$120 \text{ minutes} \div 60 \text{ minutes par heure} = 2 \text{ heures.}$$

Les avions reviendront à la position souhaitée après 2 heures. Comme la patronne de Benoît lui a indiqué à 8 h qu'il pourrait prendre sa pause lorsque les avions reviendront à cette position, Benoît pourra prendre sa pause à 10 h.

$$8h + 2 \text{ heures} = 10h.$$